1.5 Β. ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Όμοια τρίγωνα : Για τα όμοια τρίγωνα ισχύουν όλα όσα αναφέραμε στα όμοια πολύγωνα .

2.

Αποκλειστικά για τα τρίγωνα : Δύο τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν δύο γωνίες ίσες

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Ομόλογες πλευρές : Στα όμοια τρίγωνα οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες και αντίστροφα.

2.

Όμοια ορθογώνια τρίγωνα : Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι όμοια όταν έχουν μία οξεία γωνία ίση

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

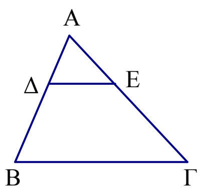
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 8 cm και ΑΓ = 12 cm. Στις ΑΒ , ΑΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε ΑΔ = 2 και ΑΕ = 3.

α) Να αποδείξετε ότι ΔΕ// ΒΓ

β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια

γ) Αν ΔΕ = 4, να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ

Προτεινόμενη λύση



α)

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{άρα} \quad ΑΒ = 4ΑΔ$$

$$\frac{ΑΓ}{ΑΕ} = \frac{12}{3} = 4 \quad \text{άρα} \quad ΑΓ = 4\,ΑΕ$$

Συνεπώς το ΒΓ είναι ομοιόθετο του ΔΕ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Α και λόγο λ= 4. Άρα το ΔΕ // ΒΓ

β)

Από το (α) προκύπτει ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ομοιόθετο του ΑΔΕ στην ομοιοθεσία με κέντρο το Α και λόγο λ= 4.
Άρα το ΑΒΓ όμοιο του ΑΔΕ

γ)

Από το (β) προκύπτει ότι ΒΓ = 4ΔΕ = 16

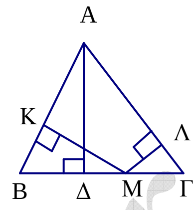
2.

Από τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε $ΜΚ \perp ΑΒ$ και $ΜΛ \perp ΑΓ$. Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

α) Τα τρίγωνα ΜΒΚ και ΑΒΔ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β) Τα τρίγωνα ΜΛΓ και ΑΔΓ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση



α)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΒΚ και ΑΒΔ έχουν τη γωνία $\hat{Β}$ κοινή, άρα είναι όμοια.

Επομένως $\frac{ΜΒ}{ΑΒ} = \frac{ΜΚ}{ΑΔ} = \frac{ΚΒ}{ΒΔ}$

Σχόλιο 1

β)

Ορθογώνια και η $\hat{Γ}$ κοινή

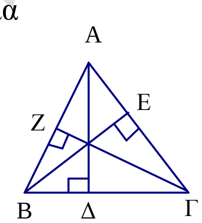
3.

Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη του ΑΔ , ΒΕ και ΓΖ .

α) Να αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΖΓ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β) Να αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ κα ΑΖΓ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση



α)

Έχουν $\hat{Ζ} = \hat{Δ} = 90^o$ και $\hat{Β}$ κοινή

$\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΑΔ}{ΓΖ} = \frac{ΒΔ}{ΒΖ}$

Σχόλιο 1

β)

$\hat{Ζ} = \hat{Ε} = 90^o$ και $\hat{Α}$ κοινή

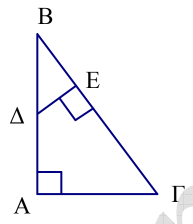
4.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 8cm και ΑΓ= 6cm.
Από το μέσο Δ της ΑΒ φέρνουμε τμήμα $ΔΕ \perp ΒΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ είναι όμοια

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΒΔΕ

Προτεινόμενη λύση



α)

$\hat{Α} = \hat{Ε} = 90^o$ και $\hat{Β}$ κοινή

β)

Πυθαγόρειο στο ΑΒΓ : $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$
$= 64 + 36 =$
$= 100$ άρα $ΒΓ = 10$

Από το (α) έχουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΕ} = \frac{ΒΓ}{ΒΔ}$ άρα

Σχόλιο 1

$$\frac{8}{ΒΕ} = \frac{6}{ΔΕ} = \frac{10}{4}$$

ΒΕ = 3,2 cm και ΔΕ = 2,4 cm

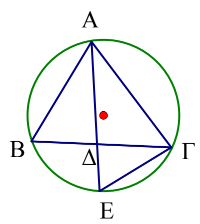
5.

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος του ΑΔ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ε .

α) Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΕΓ είναι όμοια και γράψτε την αναλογία των πλευρών τους

β) Δείξτε ότι $ΑΒ \cdot ΔΓ = ΑΔ \cdot ΓΕ$

Προτεινόμενη λύση



α)

$Α\hat{Δ}Β = Ε\hat{Δ}Γ$ ως κατακορυφήν και

$\hat{Β} = \hat{Ε}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ}$

Άρα τα τρίγωνα είναι όμοια.

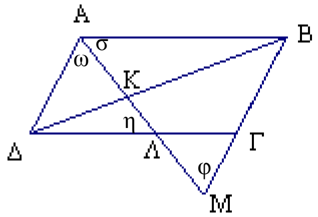
Οπότε $\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΕ}$

β)

Από το (α) είναι $\frac{ΑΒ}{ΓΕ} = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ άρα $ΑΒ \cdot ΔΓ = ΑΔ \cdot ΓΕ$

6.

Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Τυχαία ευθεία από το Α τέμνει τη ΒΔ στο Κ, τη ΔΓ στο Λ και τη ΒΓ στο Μ. Δείξτε ότι



α) ΑΔΚ όμοιο με το ΚΒΜ και γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

β) ΔΚΛ όμοιο με το ΑΚΒ και γράψετε την αναλογία των πλευρών τους

γ) $AK^2 = KM \cdot K\Lambda$

Προτεινόμενη λύση

α)

Έχουν $A\widehat{K}\Delta = B\widehat{K}M$ ως κατακορυφήν και $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι όμοια , οπότε $\dfrac{AK}{KM} = \dfrac{\Delta K}{KB} = \dfrac{A\Delta}{BM}$ **(1)**

β)

Έχουν $A\widehat{K}B = \Delta\widehat{K}\Lambda$ ως κατακορυφήν και $\hat{\sigma} = \hat{\eta}$ ως εντός εναλλάξ

Άρα είναι όμοια , οπότε $\dfrac{K\Lambda}{AK} = \dfrac{\Delta\Lambda}{AB} = \dfrac{\Delta K}{KB}$ **(2)**

γ)

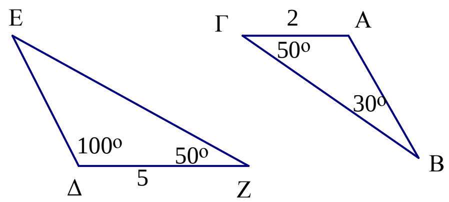
Από τις (1) (2) (έχουν μέλη ίσα) συμπεραίνουμε ότι $\dfrac{AK}{KM} = \dfrac{K\Lambda}{AK}$ άρα

$AK^2 = K\Lambda \cdot KM$

7.

α) Να αποδείξτε ότι τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος είναι όμοια

β) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας



Προτεινόμενη λύση

α)

Στο τρίγωνο ΔΕΖ είναι $\hat{\Delta} + \hat{E} + \hat{Z} = 180^o$

$100^o + \hat{E} + 50^o = 180^o$

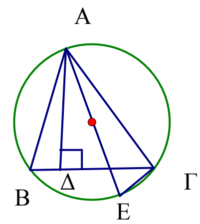
$\hat{E} = 30^o$

Αφού $\hat{E} = \hat{B} = 30^o$ και $\hat{Z} = \hat{\Gamma} = 50^o$ τα τρίγωνα είναι όμοια

β)

$\lambda = \dfrac{\Delta Z}{A\Gamma} = \dfrac{5}{2}$

8.



Στο διπλανό σχήμα το ΑΔ είναι ύψος και η ΑΕ διάμετρος.
Δείξτε ότι

α) $A\hat{\Gamma}E = 90^o$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

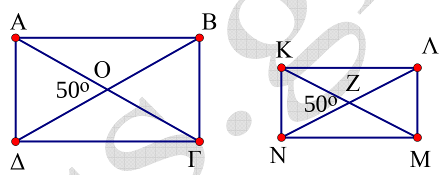
α)

Επειδή ΑΕ διάμετρος, η $A\hat{\Gamma}E$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο οπότε $A\hat{\Gamma}E = 90^o$

β)

Έχουν $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E = 90^o$ και $\hat{B} = \hat{E}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$

9.



Στο διπλανό σχήμα να δείξετε ότι τα ορθογώνια είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

Σε κάθε ορθογώνιο οι διαγώνιες είναι ίσες και διχοτομούνται, επομένως τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΖΚΝ είναι ισοσκελή και επειδή έχουν ίσες τις γωνίες της κορυφής τους, θα έχουν ίσες όλες τις γωνίες τους , επομένως είναι όμοια.

Οπότε $\dfrac{A\Delta}{KN} = \dfrac{AO}{KZ}$ **(1)**

Το ίδιο ισχύει και για τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΖΚΛ αφού οι γωνίες της κορυφής τους είναι 130^o ως παραπληρωματικές των γωνιών των 50^o.

Οπότε $\dfrac{AB}{K\Lambda} = \dfrac{AO}{KZ}$ **(2)**

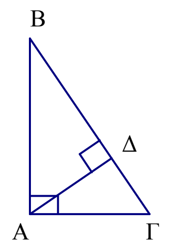
Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\dfrac{A\Delta}{KN} = \dfrac{AB}{K\Lambda}$ και επομένως

$$\frac{A\Delta}{KN} = \frac{AB}{K\Lambda} = \frac{\Delta\Gamma}{NM} = \frac{B\Gamma}{\Lambda M}$$

Και επειδή οι γωνίες των ορθογωνίων είναι ίσες σαν ορθές, τα ορθογώνια είναι όμοια

10.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ στην υποτείνουσα
Δείξτε ότι



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ είναι όμοια
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια

Προτεινόμενη λύση

α)

$B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Delta}B = 90^o$ και $\hat{B}$ κοινή

β)

$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^o$

Όμως στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^o$ και

στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\hat{B} + B\hat{A}\Delta = 90^o$

Επομένως είναι $\hat{\Gamma} = B\hat{A}\Delta$

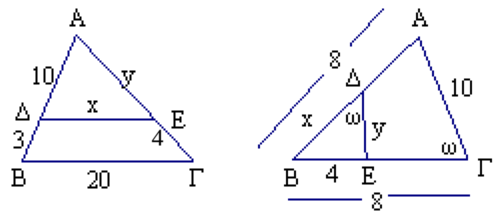
Συνεπώς τα τρίγωνα είναι όμοια (δύο γωνίες ίσες)

11.

Στο πρώτο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ

Στο δεύτερο είναι $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \omega$

Σε κάθε περίπτωση να υπολογίσετε
τα x και y



Προτεινόμενη λύση

α)

Στο πρώτο τρίγωνο ΑΒΓ

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν την $\hat{A}$ κοινή

και $\hat{B} = \hat{\Delta}$ από την παραλληλία

Άρα είναι όμοια, οπότε $\dfrac{AB}{A\Delta} = \dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{B\Gamma}{\Delta E}$

$$\frac{13}{10} = \frac{y+4}{y} = \frac{20}{x}$$

$$\frac{13}{10} = \frac{y+4}{y} \quad \text{και} \quad \frac{13}{10} = \frac{20}{x}$$

$$13y = 10y + 40 \quad \text{και} \quad 13x = 200$$

$$10y = 40 \quad \text{και} \quad 13x = 200$$

$$y = \frac{40}{3} \quad \text{και} \quad x = \frac{200}{13}$$

β)

Στο δεύτερο τρίγωνο ΑΒΓ

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΔΕ έχουν την $\hat{B}$ κοινή και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \omega$ άρα είναι όμοια

Οπότε $\dfrac{AB}{BE} = \dfrac{A\Gamma}{\Delta E} = \dfrac{B\Gamma}{B\Delta}$ άρα $\dfrac{8}{4} = \dfrac{10}{y} = \dfrac{8}{x}$ απ' όπου εύκολα $y = 5$ και $x = 4$